

Klassenstufen 9/10

1. Aufgabe

Wir würfeln π

Die Kreiszahl $\pi \approx 3,1415926535$ gibt das Verhältnis zwischen dem Radius r und dem Umfang U eines Kreises an: $U = 2 \cdot \pi \cdot r$. Ein Kreis mit Radius r hat die Fläche $A = \pi \cdot r^2$.

In dieser Aufgabe werden Sie ein stochastisches Verfahren namens *Monte-Carlo-Verfahren* anwenden, benannt nach der Spielbank Monte-Carlo. Im Monte-Carlo-Verfahren werden zufällig Punkte auf einem Quadrat durch wiederholtes „Würfeln“ der x - und y -Koordinaten ermittelt. Anschließend wird der Quotient aus der Anzahl der Punkte innerhalb des Kreises und der Anzahl aller Punkte bestimmt. Für sehr viele Punkte nähert sich dieser Quotient $\frac{\pi}{4}$ an.

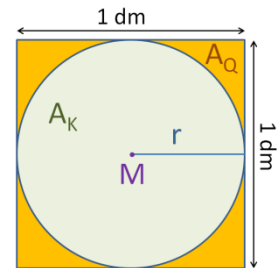


Abb. 1: Quadrat und Kreis

Aufgaben:

- Erstellen Sie eine Zeichnung mit einem Quadrat und einem inliegenden Kreis (vgl. Abb. 1). Tragen Sie hier beispielhaft zehn Punkte ein und bestimmen Sie für diesen Fall eine grobe Annäherung für π . 2 Punkte
- Beschreiben Sie ein Verfahren, welches die Koordinaten eines Punktes zufällig bestimmt. Wie kann man ermitteln, ob dieser Punkt innerhalb des Kreises liegt?
Hinweis: Der Abstand eines Punktes $A(x_A|y_A)$ vom Ursprung beträgt
$$d(A, O) = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}.$$
 2 Punkte
- Entwickeln Sie eine Computerlösung, die das Monte-Carlo-Verfahren für eine vom Benutzer vorgegebene Anzahl an Punkten realisiert und daraus einen Näherungswert für π ermittelt.
Hinweis: In einigen Programmiersprachen (zum Beispiel Scratch) werden Zahlen nur mit der Präzision einer Nachkommastelle angegeben, was für die Bestimmung von π sehr hinderlich ist. In dem Fall können Sie stattdessen z. B. $10000 \cdot \pi$ berechnen. 5 Punkte
- Stellen Sie den Verlauf der Simulation grafisch dar. Dabei sollen das Quadrat, der Kreis sowie die gewürfelten Punkte zu sehen sein. 3 Punkte
- Eine spannende Frage ist die nach der sogenannten *Konvergenz* eines Verfahrens: Wie schnell nähert sich der Schätzwert dem exakten Wert an? Erstelle ein Diagramm, das die Abweichung der ermittelten Werte vom exakten Wert π anzeigt. 2 Punkte
- Das Monte-Carlo-Verfahren ist nicht sehr gut zur Bestimmung von π geeignet. Mit dem soeben programmierten Verfahren ist es in der Praxis selbst mit modernsten Superrechnern unmöglich, π auf 100 Stellen, geschweige denn die aktuell bekannten 31 Billionen Stellen zu bestimmen. Geben Sie an, woran das liegt. 1 Punkt

Such Isaak, Such!

Isaak I ist der erste Kürbisernteroter der Kürbisernteroter GmbH. Er kann Kürbisse, die vor ihm liegen, ernten. Das Gelände, das er absuchen soll, ist in Felder unterteilt. Auf jedem Einzelfeld kann dabei ein Kürbis liegen oder nicht. Die Aufgabe des Roboters besteht darin, ein ausgewähltes Gelände nach Kürbissen zu untersuchen. Dabei stehen ihm die folgenden Befehle zur Verfügung:

VORWÄRTS Isaak bewegt sich um ein Feld nach vorn
SUCH Isaak untersucht das Feld vor ihm und erntet gegebenenfalls einen Kürbis
LINKSDREH Isaak dreht sich um 90° nach links
RECHTSDREH Isaak dreht sich um 90° nach rechts

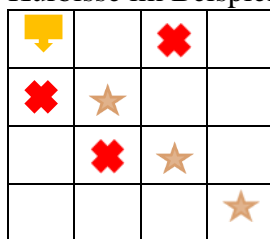
Der Roboter hat einen reißenden Absatz und wird von vielen kopiert. Die Kürbisernteroter GmbH beschließt daraufhin den Isaak II zu bauen. Dieser kann in alle Richtungen ernten. Da im Vorfeld viele Beschwerden kamen, dass die Programmierung zu langwierig wäre, hat man sich entschlossen, diese zu vereinfachen. Nun stehen nur noch folgende Befehle zur Verfügung:

SCAN Richtung Anzahl entschärft Anzahl Felder in die gegebene Richtung
BEWEG Richtung Anzahl bewegt Isaak (ohne zu drehen) Anzahl Schritte in die gegebene Richtung

Beispiel: BEWEG S 5 – Isaak bewegt sich 5 Felder in Richtung Süden

Aufgaben:

- a) Der erste Kunde hat das unten gezeigte Gelände zu bearbeiten und erstellt das folgende Programm. Kennzeichnen Sie den Weg den Isaak I zurücklegen wird. Findet er alle Kürbisse im Beispielfeld? 3 Punkte



Legende:
★ - Kürbis
✖ - unzugängliches Feld
↓ - Roboter

LINKSDREH
SUCH VORWÄRTS
RECHTSDREH
SUCH VORWÄRTS
LINKSDREH
SUCH VORWÄRTS
SUCH VORWÄRTS
RECHTSDREH
SUCH VORWÄRTS
SUCH

- b) Schreiben Sie ein Programm für den Isaak I so, dass er für das Gelände des Kunden alle Positionen prüft. 3 Punkte
c) Verändern Sie die Programme aus a) und b) so, dass sie von Isaak II verarbeitet werden können. 5 Punkte

Kunden die den Isaak I hatten und nun auf den Isaak II umgestiegen sind, sind unzufrieden, da sie nun alle (mühsam erstellten) Programme für ihre Felder neu schreiben müssen. Deshalb bietet die Kürbisernteroter GmbH als Service ein Programm an um Isaak I Programme in Isaak II Programme zu ändern.

- d) Erstellen Sie eine Computerlösung, die Programme für Isaak I so für Isaak II übersetzt, dass SCAN- und BEWEG-Befehle ausschließlich mit Anzahl 1 entstehen. 6 Punkte
e) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der Übersetzungen in Isaak II-Programme erstellt, die möglichst wenig Befehle enthalten. 8 Punkte
f) Setzen Sie den Algorithmus aus e) in einer Computerlösung um. 5 Punkte